Deux théorèmes d'effacement

Paul Barbaroux

12/11/2024

Le corps de base est $\mathbb{R}$ pour tous les espaces vectoriels considérés.

Combien d'entre nous seraient prêts à parier que dans un e.v.n. le complémentaire d'un singleton puisse être homéomorphe à l'espace entier ? Et pourtant... En dimension infinie c'est *toujours le cas* ! C'est un corollaire du théorème 2 ci-dessous. De nombreux résultats analogues et tout aussi surprenants ont fleuri dans les années 50 et 60, portant sur la géométrie des e.v.n. et en particulier sur les propriétés *d'effacement* (on dit qu'une partie A d'un espace topologique E est ***effaçable*** si $E \setminus A$ est homéomorphe à E).

L'objet de cet article est de présenter les preuves des deux résultats suivants, dus à Klee et Bessaga (voir la dernière section).

Théorème 1 : *Dans un espace vectoriel normé E* ***non complet****, toute partie* ***complète*** *A est effaçable. De plus si $A \neq \varnothing$ on peut choisir l'homéomorphisme d'effacement de telle sorte qu'il fixe tous les points de E à distance au moins 1 de A.*

Théorème 2 : *Dans un espace vectoriel normé* ***quelconque de dimension infinie****, toute partie* ***compacte*** *est effaçable.*

Remarque : Il en résulte que dans un e.v.n. non complet (resp. de dimension infinie), le complémentaire de toute partie complète (resp. compacte) est connexe par arcs, ce qui n'avait rien d'évident a priori.

Préliminaires 1

• Soit (E, d) un espace métrique. On rappelle qu'une application $f : E \to E$ est k-***contractante*** si f est k-lipschitzienne et $k \in [0, 1[$.
• Dans ce cas, si E est complet et non vide, alors f admet un unique point fixe (théorème de Banach–Picard).
• Si, de plus, E est un espace vectoriel normé (et donc un espace de Banach), alors l'application $g : x \mapsto x + f(x)$ est un homéomorphisme de E sur lui-même. En effet, d'une part, la condition « $g(x) = y$ » équivaut à « x est un point fixe de g_y », où l'application $g_y : x \mapsto y - f(x)$ est, comme f, k-contractante, ce qui prouve la bijectivité de g. D'autre part l'application g est continue, et si $x = g^{-1}(y)$ et $x' = g^{-1}(y')$ alors $x = y - f(x)$ et $x' = y' - f(x')$, d'où

$$||x - x'|| \leqslant ||y - y'|| + ||f(x) - f(x')|| \leqslant ||y - y'|| + k||x - x'|| \,,$$

et donc $||x - x'|| \leqslant \dfrac{1}{1-k}||y - y'||$, ce qui prouve[1] la continuité de g^{-1}.

• Remarquons finalement que dans ce cas, en remplaçant x par $g^{-1}(x)$ dans la relation $g(x) = x + f(x)$, on obtient $x = g^{-1}(x) + f(g^{-1}(x))$, ou encore

$$g^{-1}(x) = x - f(g^{-1}(x))\,, \tag{1}$$

égalité qui servira à la toute fin de cet article.

Démonstration du théorème 1

E désigne donc un e.v.n. non complet. On peut évidemment supposer $A \neq \varnothing$. Soit E' le complété de E, et $a \in E' \setminus E$ tel que $||a|| < 1$, fixé une fois pour toutes. On va montrer l'existence d'une application $f : E' \to E'$ vérifiant les conditions suivantes :

(i) f est contractante ;
(ii) $f(A) = \{a\}$;
(iii) $f(E' \setminus A) \subset E$;
(iv) $\forall x \in E'\,,\ d(x, A) \geqslant 1 \Longrightarrow f(x) = 0_E$.

Il suffira alors de prendre comme homéomorphisme d'effacement l'application de $E \setminus A$ dans E, induite par l'application h définie sur E' par $h(x) = x+f(x)$. En effet, la condition (i) assure que h est un homéomorphisme de E' sur lui-même (voir *Préliminaires*), et (ii) et (iii) entraînent que l'on a, pour tout $x \in E'$: $h(x) \in E \Longleftrightarrow x \in E \setminus A$.

Pour obtenir une telle contraction f, il suffit de construire un arc paramétré $\gamma : \mathbb{R}^+ \to E'$, contractant, tel que

$$\gamma(0) = a\,; \qquad \gamma(\mathbb{R}^{+*}) \subset E\,; \qquad \forall t \geqslant 1\,, \quad \gamma(t) = 0_E\,.$$

En effet, en posant $f(x) = \gamma(d(x, A))$ les conditions (i) à (iv) sont alors vérifiées : la condition (i) résulte alors du caractère contractant de γ et du fait que $x \mapsto d(x, A)$ est 1-lipschitzienne ; les conditions (ii) et (iv) sont évidentes ; la condition (iii) provient de la complétude de A : l'ensemble A est alors fermé dans E', puisqu'il est complet ; il en résulte que si $x \in E' \setminus A$ alors $d(x, A) > 0$, et donc $f(x) = \gamma(d(x, A)) \in E$.

Passons à la construction de γ : Soit r un réel tel que $0 < r < 1$. Puisque E est dense dans son complété E' il existe une suite (x_n) de points de E telle

$$\forall n \in \mathbb{N}\,, \quad ||x_n - a|| \leqslant r^n ||a||\,; \qquad x_0 = 0_E\,,$$

et il est clair qu'on peut facilement construire la suite (x_n) de telle sorte qu'elle soit injective.

[1] On aurait pu aussi utiliser le résultat plus général du point fixe de Banach-Picard « avec paramètre », voir par exemple [7].

On a, par inégalité triangulaire : $\forall n \in \mathbb{N}\,,\ ||x_{n+1} - x_n|| \leqslant (r+1)r^n||a||$. On en déduit que la série $\sum ||x_{n+1} - x_n||$ converge, et que sa somme est inférieure à $\dfrac{r+1}{1-r}||a||$. Cette quantité tendant vers $||a|| < 1$ lorsque $r \to 0$, on peut choisir r tel qu'on ait

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} ||x_{n+1} - x_n|| < 1\,.$$

Soit (t_n) la suite définie par récurrence par

$$t_0 = 1\,; \qquad \forall n \in \mathbb{N}\,, \quad t_{n+1} = t_n - \frac{1}{S}||x_{n+1} - x_n||\,. \tag{2}$$

La suite (t_n) est strictement décroisssante, et de limite nulle puisque

$$t_n = 1 + \sum_{k=0}^{n-1}(t_{k+1} - t_k) = 1 - \frac{1}{S}\sum_{k=0}^{n-1} ||x_{k+1} - x_k|| = \frac{1}{S}\sum_{k=n}^{\infty} ||x_{k+1} - x_k|| \to 0\,.$$

L'arc γ est défini par

$$\begin{cases} \gamma(0) = a \\ \gamma(t_n) = x_n \\ \gamma \text{ est affine sur } [t_{n+1}, t_n] \\ \forall t \geqslant 1\,,\ \gamma(t) = 0_E \end{cases}$$

La restriction de γ à $[t_{n+1}, t_n]$ est affine de dérivée $(x_n - x_{n+1})/(t_n - t_{n+1})$, de norme égale à S d'après (2). Or $S < 1$, d'où la contractance de γ sur chaque segment $[t_{n+1}, t_n]$, et donc sur $]0, 1]$ par inégalité triangulaire, puis sur $[0, 1]$ par continuité, et donc finalement sur $\mathbb{R}^+$ tout entier, ce qui achève la démonstration.

Préliminaires 2

On rappelle les trois résultats suivants classiques.

• (*Jauge de Minkowski*) Soit E un espace vectoriel non nul. On dira qu'un ensemble $C \subset E$ est ***admissible*** si c'est un ensemble convexe, non vide, symétrique par rapport à 0_E, tel que pour toute droite vectorielle D, on ait : $C \cap D \neq \{0_E\}$ et $D \not\subset C$. Dans ce cas, l'application

$$j_C : x \mapsto \inf\{\lambda \in \mathbb{R}^{+*} \mid x \in \lambda C\}$$

est bien définie, et j_C est une norme sur E, appelée la ***jauge*** de C.

• (*Théorème de Banach*) Toute bijection linéaire continue entre deux espaces de Banach est bicontinue.

• (*Théorème de Banach-Mazur*) Tout e.v.n. séparable (i.e. admettant une partie au plus dénombrable dense) est isomorphe (en tant qu'e.v.n.) à un sous-espace de $C^0([0,1])$ (muni de la norme infinie).

Démonstration du théorème 2

On aura besoin de quelques résultats préliminaires.

Lemme 1 : *Soit $(E, ||\cdot||)$ un e.v.n., F un sous-espace vectoriel **fermé** de E, k un réel strictement positif, et N une norme sur F telle que :*

$$\forall x \in F\,,\ N(x) \leqslant k||x||\,. \tag{3}$$

Il existe une norme N' sur E vérifiant les trois conditions
(i) $N'|_F = N$; (ii) $\forall x \in E\,,\ N'(x) \leqslant k||x||$. (iii) F est fermé dans (E, N').

Démonstration : Soit C l'enveloppe convexe de $B_1 \cup B_2$, où

$$B_1 = \{x \in E \mid ||x|| \leqslant 1/k\}\,; \qquad B_2 = \{x \in F \mid N(x) \leqslant 1\}\,.$$

On va montrer que l'ensemble C est admissible (voir *Prélim. 2*) et que la norme $N' = j_C$ convient. a) Considérons l'application $x \mapsto d(x, F)$. Elle vérifie l'inégalité triangulaire (facile) et elle est positivement homogène. Elle est nulle sur B_2, et sur B_1 elle est majorée par $x \mapsto d(x, 0_E) = ||x|| \leqslant 1/k$. Elle est donc bornée par $1/k$ sur C.

b) On a $C \cap F = B_2$: une inclusion est évidente. Pour l'autre : si $x \in C \cap F$, alors en particulier $x \in C$ et par convexité des boules et associativité du barycentre il existe $(a, b, \lambda) \in B_1 \times B_2 \times [0, 1]$ tel que $x = \lambda a + (1-\lambda)b$. Si $\lambda = 0$ alors $x = b \in B_2$. Sinon $a = b + \dfrac{x-b}{\lambda} \in F$. Or $a \in B_1$, et $B_1 \cap F \subset B_2$ d'après (3). On en déduit $a \in B_2$, et par convexité de B_2 on obtient : $x = \lambda a + (1-\lambda)b \in B_2$.

c) On en déduit que l'ensemble C est admissible ; la seule condition dont la vérification n'est pas totalement triviale est le fait que C ne contienne aucune droite (l'ensemble B_2, et donc aussi C, n'est en général pas borné pour $||\cdot||$). Supposons par l'absurde qu'une droite D vérifie $D \subset C$. D'après a) l'application $x \mapsto d(x, F)$ est donc bornée sur D et positivement homogène. On en déduit qu'elle est nulle sur D, et donc $D \subset F$ puisque F est fermé. Mais d'après b) la trace de C sur F est égale à B_2, qui est une boule pour une norme et par conséquent ne peut contenir de droite.

d) L'ensemble C étant admissible, $N' = j_C$ est une norme sur E, et on a clairement $N'|_F = N$ puisque $C \cap F = B_2$. Puisque $B_1 \subset C$ par homogénéité de la jauge on a bien $N'(x) = j_C(x) \leqslant k||x||$ pour tout $x \in E$. La norme N' vérifie donc les propriétés (i) et (ii).

e) Il reste à montrer que F est fermé dans (E, N'). D'après a) on a par homogénéité, pour tout point $x \in E$,

$$d(x, F) \leqslant N'(x)/k\,,$$

la distance $d(x, F)$ étant prise au sens de $||\cdot||$. On a alors, pour tout $y \in F$,

$$d(x, F) = d(x-y, F) \leqslant N'(x-y)/k\,.$$

En passant à la borne inférieure sur $y \in F$ on obtient, en notant cette fois d' la distance au sens de N',

$$d(x,F) \leqslant \frac{d'(x,F)}{k}.$$

Puisque F est fermé pour $||\cdot||$ il en résulte que

$$d'(x,F) = 0 \Longrightarrow d(x,F) = 0 \Longrightarrow x \in F\,,$$

autrement dit F est fermé pour N'.

Lemme 2 : *Soit* $(E, ||\cdot||)$ *un e.v.n. de dimension infinie. Il existe une norme* N *sur* E *vérifiant les deux conditions suivantes :*
(*i*) $\forall x \in E\,,\ N(x) \leqslant ||x||$.
(*ii*) (E,N) *n'est pas complet.*

Démonstration : Si $(E, ||\cdot||)$ n'est déjà pas complet il n'y a rien à faire : il suffit de prendre $N = ||\cdot||$. On supposera donc que E est un espace de Banach.

1er cas : E est séparable. D'après le théorème de Banach-Mazur on peut supposer que E est un sous-espace de $C^0([0,1])$, et que $||\cdot|| = ||\cdot||_\infty$. Prenons $N = ||\cdot||_2$. On a bien $N \leqslant ||\cdot||$. Il reste à prouver que (E,N) n'est pas complet.
Supposons par l'absurde que (E,N) soit complet. Alors l'identité étant continue de $(E, ||\cdot||)$ vers (E,N), et les deux étant des espaces de Banach par hypothèse, d'après le théorème de Banach l'identité est bicontinue et il existe donc une constante $C > 0$ telle que $\forall f \in E\,,\ ||f||_\infty \leqslant C||f||_2$.
Soit $(f_1, \dots, f_k)$ une famille orthonormale de E muni du produit scalaire usuel de $\mathrm{C}^0([0,1])$. Soit $t \in [0,1]$ et $f = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} f_i(t) f_i$. On a :

$$\sum_{i=1}^{k} f_i^2(t) = f(t) \leqslant ||f||_\infty \leqslant C||f||_2 = C\sqrt{\sum_{i=1}^{k} f_i^2(t)}\,,$$

d'où $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} f_i^2(t) \leqslant C^2$. En intégrant cette inégalité pour t variant de 0 à 1 on obtient : $k \leqslant C^2$. Il en résulte que E est de dimension finie, ce qui contredit les hypothèses.

2ème cas : cas général. Puisque E est de dimension infinie il existe une famille $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ algébriquement libre. Posons $F = \overline{\mathrm{Vect}((e_n)_{n\in\mathbb{N}})}$. Le s.e.v. F étant séparable, d'après le premier cas il existe une norme N sur F telle que $\forall x \in F\,,\ N(x) \leqslant ||x||$, et (F,N) n'est pas complet. D'après le lemme 1 N est prolongeable en une norme $N' \leqslant ||\cdot||$ sur E pour laquelle F est fermé. Puisque ce dernier n'est pas complet on en déduit donc que (E,N') n'est pas complet.

Fin de la démonstration du théorème 2 : Soit K un compact d'un e.v.n. $(E, ||\cdot||)$ de dimension infinie. D'après le lemme 2, il existe une norme $N \leqslant ||\cdot||$ sur E telle que (E, N) ne soit pas complet. L'application id : $(E, ||\cdot||) \to (E, N)$ est alors continue donc K reste compact pour N, donc complet. D'après le théorème 1, il existe un homéomorphisme h de $E \setminus K$ sur E.

Il faut cependant se garder de conclure trop vite, puisque cet homéomorphisme est relatif à la topologie induite par N (au départ et à l'arrivée). Pour la norme initiale $||\cdot||$, ni la continuité de h ni celle de h^{-1} ne vont de soi.

Reprenons la construction de h donnée par la démonstration du théorème 1.
- L'application h est définie par $h(x) = x + \gamma(d(x, K))$, où la distance d et l'arc γ sont définis à partir de la norme N. L'arc γ est contractant pour cette norme, ce qui assure la bijectivité de h.
- L'argument clé est que sur $E \setminus K$, $x \mapsto d(x, K)$ est à valeurs dans $]0, 1]$, intervalle sur lequel l'arc paramétré γ, affine sur chaque intervalle $[t_{n+1}, t_n]$, est continu pour n'importe quelle norme (et même pour n'importe quelle structure d'e.v.t.) sur E.
- L'application $x \mapsto \gamma(d(x, K))$ est alors continue sur $E \setminus K$ comme composée de

$$(E \setminus K,\ ||\cdot||) \ \xrightarrow{\mathrm{id}_E}\ (E \setminus K,\ N) \ \xrightarrow{x \mapsto d(x,K)}\ \mathbb{R} \ \xrightarrow{\gamma}\ (E,\ ||\cdot||)\,,$$

d'où la continuité de $h : (E \setminus K, ||\cdot||) \to (E, ||\cdot||)$.
- Enfin, l'application h^{-1} vérifie (voir *Prélim. 1*, égalité (1))

$$h^{-1}(x) = x - \gamma(d((h^{-1}(x)), K))\,.$$

Sa continuité s'obtient en considérant le diagramme suivant, où chaque application est continue.

$$(E, ||\cdot||) \ \xrightarrow{\mathrm{id}_E}\ (E, N) \ \xrightarrow{h^{-1}}\ (E \setminus K, N) \ \xrightarrow{x \mapsto d(x,K)}\ \mathbb{R} \ \xrightarrow{\gamma}\ (E, ||\cdot||)\,,$$

ce qui achève la démonstration.

Sources et compléments

Le théorème 2 est dû à Klee (voir [6]), mais les preuves présentées ici, et en particulier la méthode de la « norme non complète », sont essentiellement dues à Bessaga. Je me suis inspiré pour cet article du livre de Bessaga et Pelczyński [3]. Ce dernier est d'une rédaction plutôt elliptique et il m'a fallu pas mal de temps pour me persuader que les arguments employés étaient corrects. J'en ai d'ailleurs profité pour simplifier légèrement la preuve du lemme 2 par l'usage du théorème de Banach-Mazur et d'un argument élémentaire et classique : tout s.e.v. de $C^0([0, 1])$ sur lequel la norme 2 est plus fine que la norme infinie est de dimension finie, énoncé déjà tombé en exercice d'oral des concours des grandes écoles, et intervenant dans un théorème de Grothendieck bien connu des préparationnaires à l'agrégation.

D'autres résultats tout aussi étonnants datent de la même époque. Par exemple : la boule unité d'un e.v.n. de dimension infinie est elle-même effaçable (c'est une conséquence directe des résultats de Klee [6]) ; la *sphère* unité d'un espace de Hilbert de dimension infinie est homéomorphe (Klee [5]) et même C^{∞}–difféomorphe (Bessaga [2]), et même isomorphe au sens $\mathbb{R}$-analytique (Dobrowolski [4]), à l'espace entier. Des extensions partielles aux e.v.t. ont également été obtenues, (voir par exemple Anderson [1]).

Bibliographie

[1] Anderson R.D., On a theorem of Klee, *Proceedings of the American Mathematical Society*, Vol. 17, No. 7 (1966), p. 1401-1404.

[2] Bessaga C., Every infinite-dimensional Hilbert Space is diffeomorphic with its unit sphere, *Bull. Acad. Polon. Sci.*, Sér. sci. math. astr. et phys. 14 (1966), p. 27-31.

[3] Bessaga C. et Pelczyński A., *Selected topics in infinite-dimensional topology*, Warszawa : Monografie Matematyczne 1975.

[4] Dobrowolski T., Every Infinite-Dimensional Hilbert Space is Real-Analytically Isomorphic with Its Unit Sphere, *Journal of Functional Analysis*, 134-2 (1995), p. 350-362.

[5] Klee V. L., Convex bodies and periodic homemorphisms in Hilbert space, *Trans. Amer. Math. Soc.* vol. 74 (1953) pp. 10-43.

[6] Klee V. L., A Note on Topological Properties of Normed Linear Spaces, *Proceedings of the American Mathematical Society*, Vol. 7, No. 4 (Aug., 1956), pp. 673- 674

[7] Ramis E., Deschamps C., Odoux J., *Cours de Mathématiques Spéciales, 3 Topologie et éléments d'analyse*, Paris : Masson 1976.