Projections d'un polyèdre régulier

Paul Barbaroux

01/08/2025

Dans cette note on s'intéresse à l'exercice suivant[(1)] :

Exercice 1 : *Dans l'espace usuel de dimension 3, on considère un polyèdre régulier, ainsi qu'un plan $\mathcal{P}$. On note S la somme des carrés des longueurs des arêtes du polyèdre, et $S_{\mathcal{P}}$ la somme des carrés des longueurs des projections orthogonales des arêtes sur un plan $\mathcal{P}$. Montrer que $S_{\mathcal{P}}/S = 2/3$. Généraliser.*

Avant d'en donner une solution, commençons par un énoncé plus simple qui va aider à comprendre l'idée principale : *la sphéricité d'un ellispoïde d'inertie est en quelque sorte la forme géométrique du lemme de Schur.*

Exercice 2 : *Dans l'espace usuel de dimension 3, soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des sommets d'un polyèdre régulier, et $\mathcal{D}$ une droite passant par le centre du polyèdre. Montrer que la somme $\sum_{s\in\mathcal{S}} d(s,\mathcal{D})^2$ ne dépend pas de $\mathcal{D}$.*

Un physicien donnerait une solution immédiate de l'ex. 2 consistant à remarquer que $\sum_{s\in\mathcal{S}} d(s,\mathcal{D})^2$ est le moment d'inertie de $\mathcal{S}$ par rapport à $\mathcal{D}$ (après avoir affecté à chaque sommet une masse ponctuelle égale à 1), et que l'ellispoïde d'inertie est une sphère « par raison de symétrie ». On va tout d'abord formaliser ce dernier argument correctement, c'est-à-dire de façon intrinsèque (sans utilisation de coordonnées).

On remplacera les points par des vecteurs en vectorialisant au centre du polyèdre. Dans la suite E désigne donc un espace vectoriel euclidien de dimension $n \neq 0$. Le produit scalaire est noté $(\cdot \mid \cdot)$. Étant donné un s.e.v. F, p_F désigne le projecteur orthogonal sur F. Étant donné un ensemble $A \subset E$, on dit qu'une isométrie g est une ***isométrie de*** A si l'ensemble A est globalement invariant par g. L'ensemble des isométries de A est un sous-groupe de $O(E)$.

Tout d'abord l'argument de symétrie repose sur le fait qu'« aucune direction n'est privilégiée », ce qui se traduit par la définition suivante : on dira qu'un ensemble de vecteurs A d'un espace euclidien ***possède suffisamment de symétries*** si le groupe des isométries de A est irréductible[(2)].

Il se trouve que c'est effectivement le cas pour un polyèdre régulier :

---

(1) Exercice que le lecteur est invité à chercher avant de lire plus loin ! La résolution doit se faire si possible *sans calcul.*

(2) On rappelle qu'un sous-groupe G de $\mathrm{GL}(E)$ est ***irréductible*** si les seuls sous-espaces vectoriels de E stables par G sont triviaux.

Proposition : *Dans un espace euclidien de dimension 3, l'ensemble $\mathcal{S}$ des sommets d'un polyèdre régulier possède suffisamment de symétries.*

Démonstration : Le groupe G des isométries de $\mathcal{S}$ contient au moins deux rotations d'axes distincts et d'angles non multiples de π (considérer des rotations stabilisant deux faces adjacentes). Soit F un s.e.v. G-stable non nul de E. Il existe un vecteur $a \in F \setminus \{0\}$. L'axe d'au moins l'une des deux rotations, appelons-la r, ne contient pas a. Le vecteur a n'est donc pas invariant par r, ni anti-invariant (puisque $\dim(E) = 3$ les seules rotations ayant un vecteur anti-invariant non nul sont les retournements, ce qui est exclu). Les vecteurs a et $r(a)$ sont alors non colinéaires, d'où $\dim F \geqslant 2$. Mais $F^\perp$ est également G-stable, d'où $\dim F^\perp \geqslant 2$ ou $F^\perp = \{0\}$. Puisque $\dim E = 3$ la seule possibilité est $F^\perp = \{0\}$ c'est-à-dire $F = E$, et donc G est irréductible.

Remarquons que si F est un s.e.v. de E et $x \in E$ alors $d(x, F) = ||p_{F^\perp(x)}||$. L'énoncé de l'ex. 2 est alors un cas particulier du théorème suivant, qui fournit en outre la valeur $\sum_{s\in\mathcal{S}} d(s, \mathcal{D})^2 = (2/3) \times \sum_{s\in\mathcal{S}} ||s||^2$.

Théorème 1 : *Soit E un espace euclidien et $A \subset E$ un ensemble fini. Si A possède suffisamment de symétries, alors pour tout s.e.v. F de E on a :*

$$\sum_{a\in A} ||p_F(a)||^2 = \frac{\dim F}{\dim E} \sum_{a\in A} ||a||^2 .$$

Démonstration : Pour $x \in E$ et $A \subset E$ fini, posons

$$u_A(x) = \sum_{a\in A} (x \mid a)\, a .$$

u_A est un opérateur auto-adjoint[(1)], et a donc une valeur propre λ. Mais u_A commute avec toutes les isométries de A : si g est une telle isométrie, alors

$$g(u_A(x)) = \sum_{a\in A} (x \mid a) g(a) = \sum_{a\in A} (g(x) \mid g(a)) g(a) = \sum_{b\in A} (g(x) \mid b) b = u_A(g(x)) .$$

Il en découle que G stabilise le sous-espace propre $\mathrm{Ker}(u_A - \lambda\, \mathrm{id})$. Mais G est irréductible, d'où $\mathrm{Ker}(u_A - \lambda\, \mathrm{id}) = E$ c'est-à-dire $u_A = \lambda\, \mathrm{id}$. [(2)]

Ensuite pour tout $e \in E$ tel que $||e|| = 1$, on a

$$\sum_{a\in A} (e \mid a)^2 = \sum_{a\in A} (e \mid a)(a \mid e) = (u_A(e) \mid e) = (\lambda e \mid e) = \lambda ||e||^2 = \lambda .$$

En considérant une base orthonormale $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ du sous-espace F, on obtient

$$\sum_{a\in A} ||p_F(a)||^2 = \sum_{a\in A} \sum_{i=1}^{p} (e_i \mid a)^2 = \sum_{i=1}^{p} \sum_{a\in A} (e_i \mid a)^2 = \sum_{i=1}^{p} \lambda = \lambda \dim F .$$

(1) Précisément u_A est « l'opérateur d'inertie dual » de A : si $||x|| = 1$ alors $(u_A(x) \mid x)$ est le moment d'inertie de A par rapport à l'hyperplan $x^\perp$.

(2) Ce qu'on peut voir comme le lemme de Schur appliqué à G et u_A.

Le cas particulier $F = E$ donne alors

$$\sum_{a \in A} ||a||^2 = \lambda n \,,$$

ce qui donne la valeur de λ et termine la preuve.

On peut maintenant facilement étendre le th. 1 à un résultat plus général permettant de traiter non seulement l'ex. 2 mais aussi l'exercice initial ainsi que plusieurs autres situations géométriques analogues. Il suffit de remplacer l'utilisation d'un *ensemble* fini de vecteurs par celle d'une *famille* finie. Soit I un ensemble (d'« indices »). On suppose donnée une action $(g, i) \mapsto g \cdot i$ du groupe orthogonal $O(E)$ sur I. On dit qu'une famille de vecteurs $(x_i)_{i \in I}$ est ***admissible*** si $g(x_i) = x_{g \cdot i}$ pour tout $i \in I$ et $g \in O(E)$. Comme précédemment une isométrie d'un ensemble $J \subset I$ est une isométrie qui laisse J globalement invariant, et on dit que J possède suffisamment de symétries si son groupe d'isométries est irréductible. On a alors

Théorème 2 : *Soit $f = (x_i)_{i \in I}$ une famille admissible de vecteurs dans un espace euclidien E et $J \subset I$ un ensemble fini ayant suffisamment de symétries. Pour tout s.e.v. $F \subset E$ on a :*

$$\sum_{i \in J} ||p_F(x_i)||^2 = \frac{\dim F}{\dim E} \sum_{i \in J} ||x_i||^2 \,.$$

C'est la même preuve que pour le théorème 1 en considérant cette fois $u_f(x) = \sum_{i \in J} (x|x_i)\, x_i$ au lieu de $u_A(x) = \sum_{a \in A} (x \mid a)\, a$.

Remarques : *a*) Le th. 2 redonne le th. 1, lorsqu'on l'applique à $I = E$ et à la famille indexée par l'identité.

b) L'ex. 1 se résout en prenant

• $I = E \times E$ et, pour $(a, b) \in I$, et $g \in O(E)$, $g \cdot (a, b) = (g(a), g(b))$.

• $x_{(a,b)} = b - a$. L'admissibilité de $(x_{(a,b)})$ provient de la linéarité de g.

• $J = \{(a, b) \in E \times E \,,\ \{a, b\}$ est une arête du polyèdre$\}$ (On se donne donc deux couples (a, b) et (b, a) pour chaque arête $\{a, b\}$ telle que $a \neq b$). De façon évidente J possède suffisamment de symétries, puisque toute isométrie du polyèdre envoie une arête sur une arête, et par conséquent est une isométrie de J.

c) Un polyèdre n'a pas besoin d'être régulier pour vérifier la propriété de l'ex. 1 : il suffit qu'il ait *même groupe d'isométries qu'un polyèdre régulier*(1). On peut obtenir de tels polyèdres par troncature de polyèdres réguliers (par exemple, la conclusion de l'ex. 1 subsiste pour des *polyèdres archimédiens*(2)) ou au contraire en faisant « pousser » d'autres

(1) Il suffit même que son groupe d'isométries *contienne* celui d'un polyèdre régulier.

(2) Voir par exemple :

`https://fr.wikipedia.org/wiki/Solide_d'Archimède`

`https://mathcurve.com//polyedres/archimedien/archimedien.shtml` polyèdres sur les faces, par exemple en appuyant sur chaque face d'un polyèdre régulier un pyramide ou un prisme de hauteur fixée.

d) Appelons ***squelette*** tout ensemble fini $J \subset E \times E$. À partir de squelettes des arêtes de polyèdres réguliers, ou donnés par la remarque *c*), on peut en construire beaucoup d'autres vérifiant la propriété de l'ex. 1 en remarquant que l'ensemble de ces squelettes est stable par translations et unions disjointes.